

Numeryczna analiza stabilności i bifurkacji rozwiązań okresowych równań różniczkowych zwyczajnych

Daniel Wilczak

Instytut Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

Centrum Zastosowań Matematyki

Między teorią a zastosowaniami - matematyka działaniu

Przykład

Policz n -tą pochodną funkcji $f(x) = e^{\sin e^{\cos x+x}}$

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 1$

[wykonalne ćwiczenie]

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 2$

[przecież Mathematica to policzy]

- w punkcie $x_0 = -2$ dla $n = 20$

[hmm, a może wystarczy, że pochodna istnieje?:-)]

Przykład

Policz n -tą pochodną funkcji $f(x) = e^{\sin e^{\cos x+x}}$

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 1$

[wykonalne ćwiczenie]

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 2$

[przecież Mathematica to policzy]

- w punkcie $x_0 = -2$ dla $n = 20$

[hmm, a może wystarczy, że pochodna istnieje?:-)]

Przykład

Policz n -tą pochodną funkcji $f(x) = e^{\sin e^{\cos x+x}}$

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 1$

[wykonalne ćwiczenie]

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 2$

[przecież Mathematica to policzy]

- w punkcie $x_0 = -2$ dla $n = 20$

[hmm, a może wystarczy, że pochodna istnieje?:-)]

Przykład

Policz n -tą pochodną funkcji $f(x) = e^{\sin e^{\cos x+x}}$

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 1$

[wykonalne ćwiczenie]

- w punkcie $x_0 = 1$ dla $n = 2$

[przecież Mathematica to policzy]

- w punkcie $x_0 = -2$ dla $n = 20$

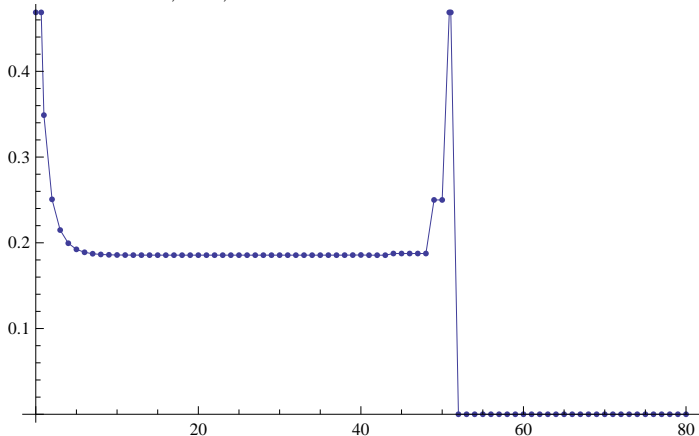
[hmm, a może wystarczy, że pochodna istnieje?:-)]

To może iloraz różnicowy:

Spróbujmy policzyć

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

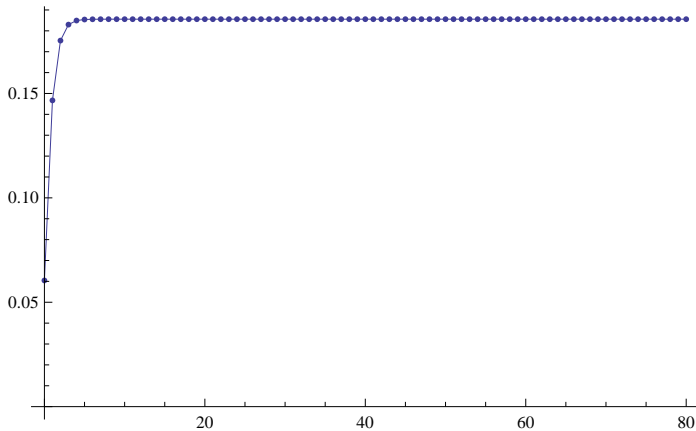
dla $h = k^{-i}$, $i = 0, \dots, 80$.



Efekt kasowania bitów przy odejmowaniu

Bądźmy sprytni - mamy liczby zespolone!

$$f'(x_0) \approx \Im \frac{f(x_0 + ih)}{h}$$



Funkcja musi mieć rozszerzenie zespolone!

Obserwacja

Aby wyznaczyć **dokładną** wartość pochodnej **w punkcie** **nie potrzebujemy wzoru** na pochodną.

Zamiast liczyć na symbolach, będziemy liczyć na parach (u, u') **liczb** (nie symboli).

$$(p, p') \pm (q, q') = (p \pm q, p' \pm q')$$

$$(p, p') * (q, q') = (p * q, p'q + q'p)$$

$$(p, p') / (q, q') = (p/q, p'/q - q'p/q^2)$$

Analogicznie

$$\sin(p, p') = (\sin(p), \cos(p) * p')$$

$$\cos(p, p') = (\cos(p), -\sin(p) * p')$$

$$\exp(p, p') = (\exp(p), \exp(p) * p')$$

Obserwacja

Aby wyznaczyć **dokładną** wartość pochodnej **w punkcie** **nie potrzebujemy wzoru** na pochodną.

Zamiast liczyć na symbolach, będziemy liczyć na parach (u, u') **liczb** (nie symboli).

$$(p, p') \pm (q, q') = (p \pm q, p' \pm q')$$

$$(p, p') * (q, q') = (p * q, p'q + q'p)$$

$$(p, p') / (q, q') = (p/q, p'/q - q'p/q^2)$$

Analogicznie

$$\sin(p, p') = (\sin(p), \cos(p) * p')$$

$$\cos(p, p') = (\cos(p), -\sin(p) * p')$$

$$\exp(p, p') = (\exp(p), \exp(p) * p')$$

Obserwacja

Aby wyznaczyć **dokładną** wartość pochodnej **w punkcie** **nie potrzebujemy wzoru** na pochodną.

Zamiast liczyć na symbolach, będziemy liczyć na parach (u, u') **liczb** (nie symboli).

$$\begin{aligned}(p, p') \pm (q, q') &= (p \pm q, p' \pm q') \\(p, p') * (q, q') &= (p * q, p'q + q'p) \\(p, p') / (q, q') &= (p/q, p'/q - q'p/q^2)\end{aligned}$$

Analogicznie

$$\begin{aligned}\sin(p, p') &= (\sin(p), \cos(p) * p') \\ \cos(p, p') &= (\cos(p), -\sin(p) * p') \\ \exp(p, p') &= (\exp(p), -\exp(p) * p')\end{aligned}$$

Przykład

Policzyć $f(3)$ oraz $f'(3)$ dla $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x+3}$.

- każdą stałą c zamieniamy na $(c, 0)$
- każde wystąpienie zmiennej x zamieniamy na $(x, 1)$

$$\begin{aligned} & \frac{((3, 1) + (1, 0)) \times ((3, 1) - (2, 0))}{(3, 1) + (3, 0)} \\ &= \frac{(4, 1) \times (1, 1)}{(6, 1)} \\ &= \frac{(4, 5)}{(6, 1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{18} \right) \end{aligned}$$

Wszystko bez wyznaczania wzoru na pochodną

Danielu - napisz trochę kodu

Przykład

Policzyć $f(3)$ oraz $f'(3)$ dla $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x+3}$.

- każdą stałą c zamieniamy na $(c, 0)$
- każde wystąpienie zmiennej x zamieniamy na $(x, 1)$

$$\begin{aligned} & \frac{((3, 1) + (1, 0)) \times ((3, 1) - (2, 0))}{(3, 1) + (3, 0)} \\ &= \frac{(4, 1) \times (1, 1)}{(6, 1)} \\ &= \frac{(4, 5)}{(6, 1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{18} \right) \end{aligned}$$

Wszystko bez wyznaczania wzoru na pochodną

Danielu - napisz trochę kodu

Przykład

Policzyć $f(3)$ oraz $f'(3)$ dla $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x+3}$.

- każdą stałą c zamieniamy na $(c, 0)$
- każde wystąpienie zmiennej x zamieniamy na $(x, 1)$

$$\begin{aligned} & \frac{((3, 1) + (1, 0)) \times ((3, 1) - (2, 0))}{(3, 1) + (3, 0)} \\ &= \frac{(4, 1) \times (1, 1)}{(6, 1)} \\ &= \frac{(4, 5)}{(6, 1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{18} \right) \end{aligned}$$

Wszystko bez wyznaczania wzoru na pochodną

Danielu - napisz trochę kodu

Przykład

Policzyć $f(3)$ oraz $f'(3)$ dla $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x+3}$.

- każdą stałą c zamieniamy na $(c, 0)$
- każde wystąpienie zmiennej x zamieniamy na $(x, 1)$

$$\begin{aligned} & \frac{((3, 1) + (1, 0)) \times ((3, 1) - (2, 0))}{(3, 1) + (3, 0)} \\ &= \frac{(4, 1) \times (1, 1)}{(6, 1)} \\ &= \frac{(4, 5)}{(6, 1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{18} \right) \end{aligned}$$

Wszystko bez wyznaczania wzoru na pochodną

Danielu - napisz trochę kodu

Przykład

Policzyć $f(3)$ oraz $f'(3)$ dla $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x+3}$.

- każdą stałą c zamieniamy na $(c, 0)$
- każde wystąpienie zmiennej x zamieniamy na $(x, 1)$

$$\begin{aligned} & \frac{((3, 1) + (1, 0)) \times ((3, 1) - (2, 0))}{(3, 1) + (3, 0)} \\ &= \frac{(4, 1) \times (1, 1)}{(6, 1)} \\ &= \frac{(4, 5)}{(6, 1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{18} \right) \end{aligned}$$

Wszystko bez wyznaczania wzoru na pochodną

Przykład

Policzyć $f(3)$ oraz $f'(3)$ dla $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x+3}$.

- każdą stałą c zamieniamy na $(c, 0)$
- każde wystąpienie zmiennej x zamieniamy na $(x, 1)$

$$\begin{aligned} & \frac{((3, 1) + (1, 0)) \times ((3, 1) - (2, 0))}{(3, 1) + (3, 0)} \\ &= \frac{(4, 1) \times (1, 1)}{(6, 1)} \\ &= \frac{(4, 5)}{(6, 1)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{18} \right) \end{aligned}$$

Wszystko bez wyznaczania wzoru na pochodną

Danielu - napisz trochę kodu

A co z pochodnymi wyższych rzędów?

Arytmetyka szeregów Taylora dla funkcji jednej zmiennej.

Oznaczenie: $f^{[k]}(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$ - k -ty współczynnik Taylora f w x

$$(f \pm g)^{[k]} = f^{[k]} \pm g^{[k]}$$

$$(f \cdot g)^{[k]} = \sum_{i=0}^k f^{[i]} \cdot g^{[k-i]}$$

$$(f/g)^{[k]} = \frac{1}{g^{[0]}} \left(f^{[k]} - \sum_{i=0}^{k-1} (f/g)^{[i]} \cdot g^{[k-i]} \right)$$

$$(\exp(f))^{[k]} = \begin{cases} \exp(f^{[0]}) & \text{dla } k = 0 \\ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k i f^{[i]} \cdot (\exp(f))^{[k-i]} & \text{dla } k > 0 \end{cases}$$

A co z pochodnymi wyższych rzędów?

Arytmetyka szeregów Taylora dla funkcji jednej zmiennej.

Oznaczenie: $f^{[k]}(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$ - k -ty współczynnik Taylora f w x

$$(f \pm g)^{[k]} = f^{[k]} \pm g^{[k]}$$

$$(f \cdot g)^{[k]} = \sum_{i=0}^k f^{[i]} \cdot g^{[k-i]}$$

$$(f/g)^{[k]} = \frac{1}{g^{[0]}} \left(f^{[k]} - \sum_{i=0}^{k-1} (f/g)^{[i]} \cdot g^{[k-i]} \right)$$

$$(\exp(f))^{[k]} = \begin{cases} \exp(f^{[0]}) & \text{dla } k = 0 \\ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k i f^{[i]} \cdot (\exp(f))^{[k-i]} & \text{dla } k > 0 \end{cases}$$

Wzór Taylora z resztą Lagrange'a

$$f(a+h) = \underbrace{\sum_{k=0}^r f^{[k]}(a)h^k}_{F(h)} + f^{[r+1]}(y)h^{r+1}$$

dla pewnego $y \in [a, a+h]$.

$$\left| \int_a^{a+h} f(x)dx - \int_0^h F(t)dt \right| \leq \max_{a \leq y \leq a+h} |f^{[r+1]}(y)| \frac{h^{r+2}}{r+2}$$

Wzór Taylora z resztą Lagrange'a

$$f(a+h) = \underbrace{\sum_{k=0}^r f^{[k]}(a)h^k}_{F(h)} + f^{[r+1]}(y)h^{r+1}$$

dla pewnego $y \in [a, a+h]$.

$$\left| \int_a^{a+h} f(x)dx - \int_0^h F(t)dt \right| \leq \max_{a \leq y \leq a+h} |f^{[r+1]}(y)| \frac{h^{r+2}}{r+2}$$

Przyjmując

$$\max_{a \leq y \leq a+h} |f^{[r+1]}(\mathbf{y})| \approx |f^{[r+1]}(\mathbf{a})|$$

Stąd

$$\left| f^{[r+1]}(\mathbf{a}) \frac{h^{r+2}}{r+2} \right| < tol \quad \Rightarrow \quad h < \left| \frac{tol(r+2)}{f^{[r+1]}(\mathbf{a})} \right|^{1/(r+2)}$$

Całki oznaczone - praktyczny algorytm adaptacyjny.

Przyjmując

$$\max_{a \leq y \leq a+h} |f^{[r+1]}(\mathbf{y})| \approx |f^{[r+1]}(\mathbf{a})|$$

Stąd

$$\left| f^{[r+1]}(\mathbf{a}) \frac{h^{r+2}}{r+2} \right| < tol \quad \implies \quad h < \left| \frac{tol(r+2)}{f^{[r+1]}(\mathbf{a})} \right|^{1/(r+2)}$$

Propagacja dżetów:

$$(p \cdot q)^{[\kappa]} = \sum_{0 \leq i \leq \kappa} p^{[i]} q^{[\kappa-i]}$$

$$(\exp(p))^{[\kappa]} = \frac{1}{\kappa_i} \sum_{0 \leq \nu \leq \kappa - e_i} (\kappa_i - \nu_i) p^{[\kappa-\nu]} (\exp(p))^{[\nu]}$$

Równania różniczkowe

Rozważmy zagadnienie początkowe

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

Określamy $F = f \circ x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$x^{[n+1]}(0) = \frac{1}{n+1} F^{[n]}(0).$$

Przykład

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x(x^2 + y^2) \end{cases}$$

i warunek początkowy $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Równania różniczkowe

Rozważmy zagadnienie początkowe

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

Określamy $F = f \circ x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$x^{[n+1]}(0) = \frac{1}{n+1} F^{[n]}(0).$$

Przykład

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x(x^2 + y^2) \end{cases}$$

i warunek początkowy $(x_0, y_0) = (1, -1)$.

Równania różniczkowe

Rozważmy zagadnienie początkowe

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

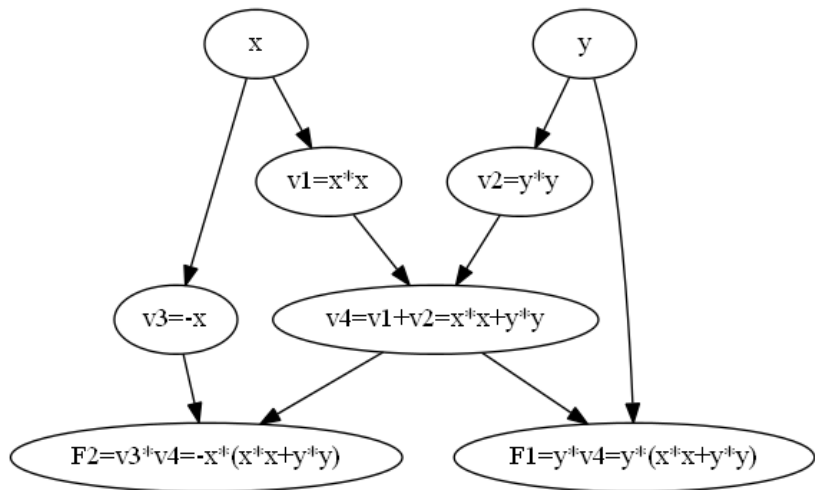
Określamy $F = f \circ x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$x^{[n+1]}(0) = \frac{1}{n+1} F^{[n]}(0).$$

Przykład

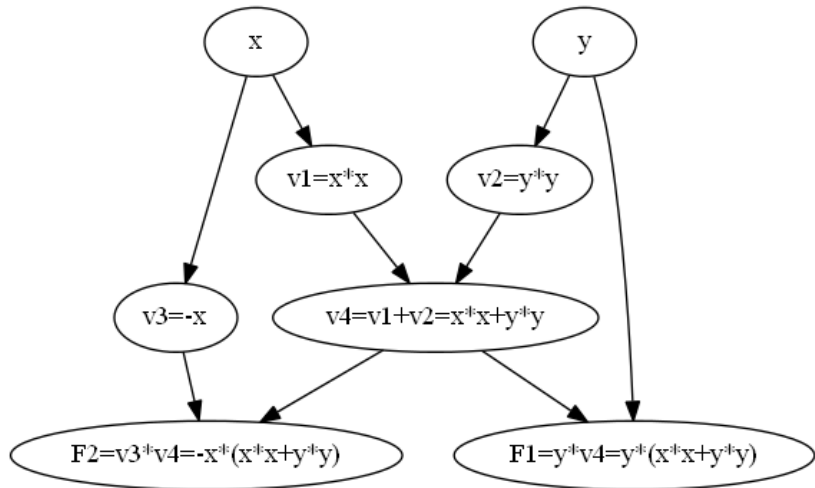
$$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x(x^2 + y^2) \end{cases}$$

i warunek początkowy $(x_0, y_0) = (1, -1)$.



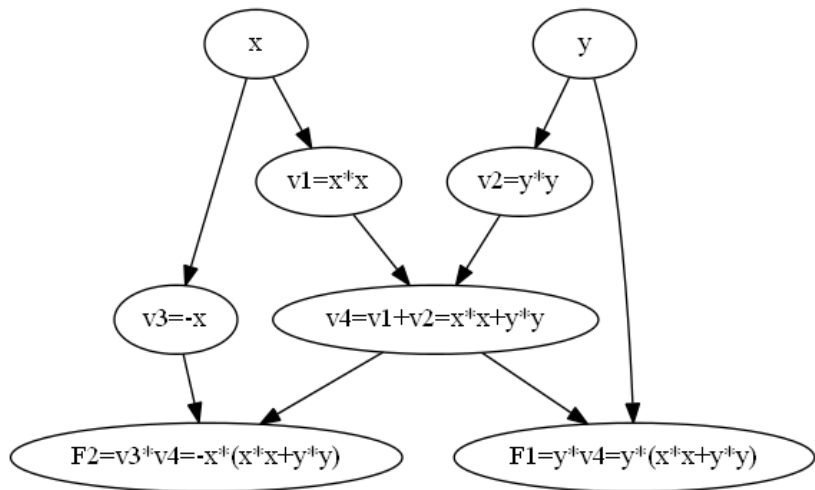
$$x^{[1]} = F_1^{[0]} = -2$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2							



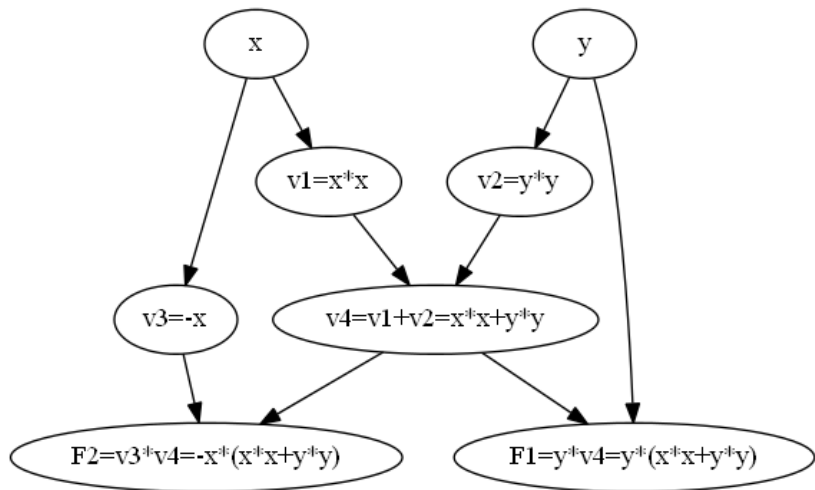
$$y^{[1]} = F_2^{[0]} = -2$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2						



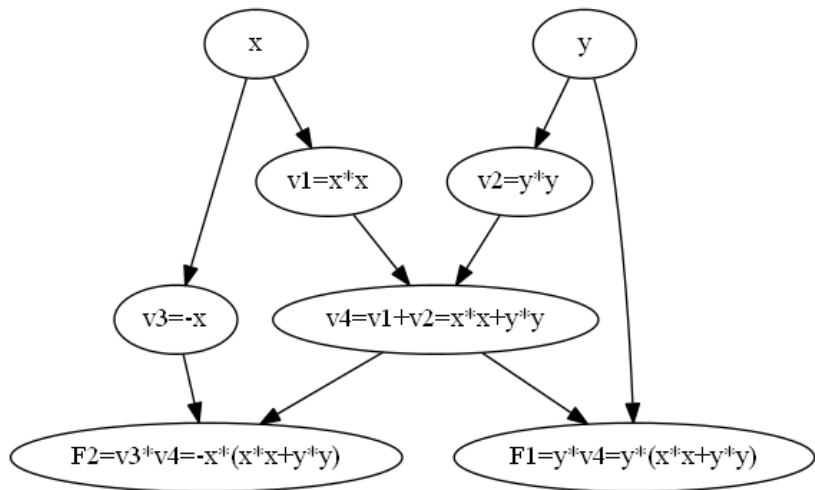
$$v_1^{[1]} = 2 * x^{[0]} * x^{[1]} = -4$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4					



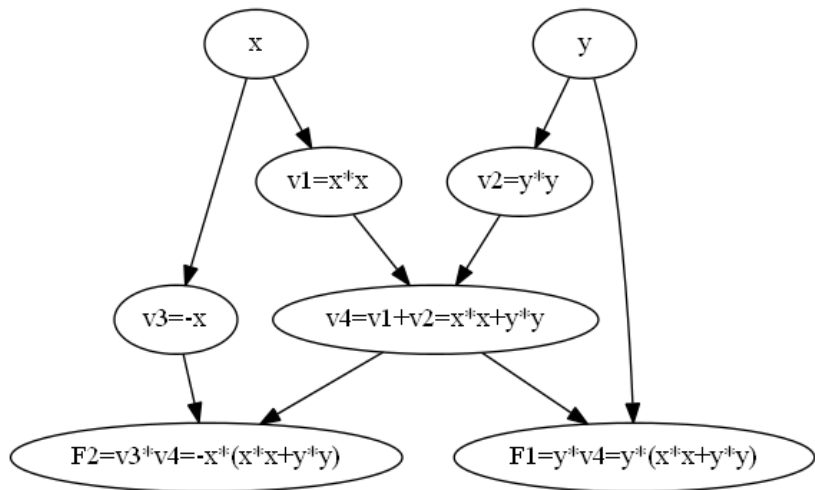
$$v_2^{[1]} = 2 * y^{[0]} * y^{[1]} = 4$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4				



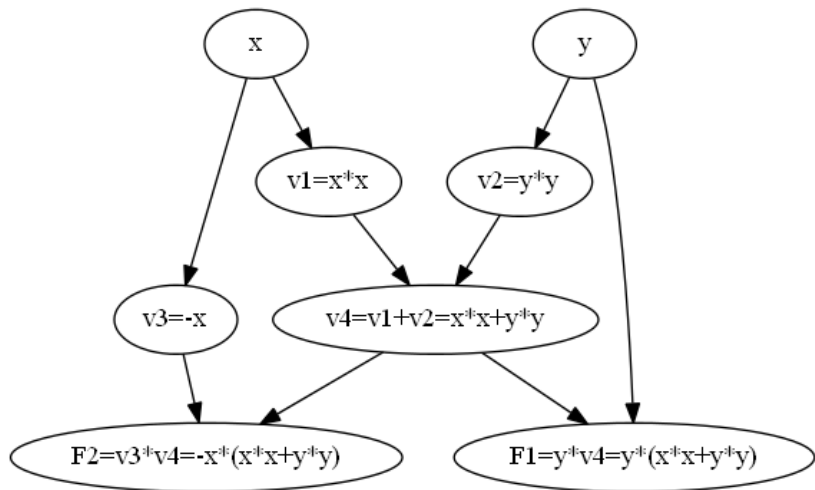
$$v_3^{[1]} = -x^{[1]} = 2$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2			



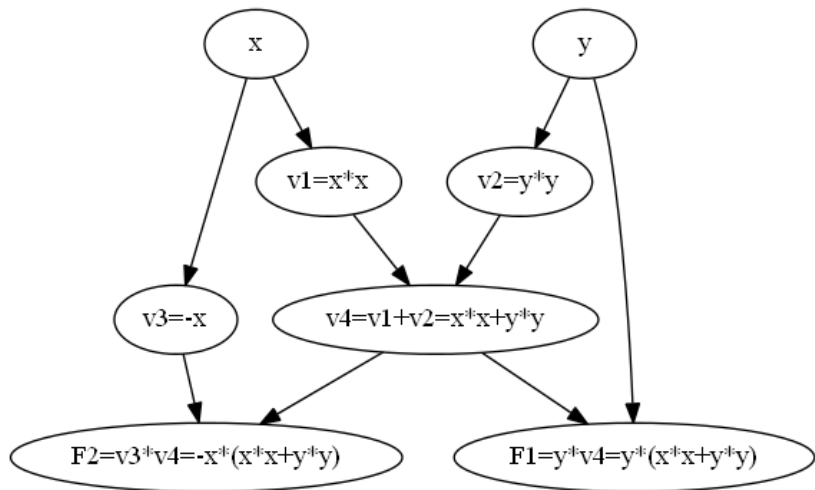
$$v_4^{[1]} = v_1^{[1]} + v_2^{[1]} = 0$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2	0		



$$F_1^{[1]} = y^{[0]} * v_4^{[1]} + y^{[1]} * v_4^{[0]} = -4$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2	0	-4	



$$F_2^{[1]} = v_3^{[0]} * v_4^{[1]} + v_3^{[1]} * v_4^{[0]} = 4$$

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2	0	-4	4

Przykład - ciąg dalszy.

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2	0	-4	4
2	-2	2						

$$x^{[2]} = \frac{1}{2} F_1^{[1]} = -2$$

$$y^{[2]} = \frac{1}{2} F_2^{[1]} = 2$$

Zatem otrzymaliśmy początek rozwinięcia Taylora dla rozwiązania

$$x(t) = 1 - 2t - 2t^2 + \dots$$

$$y(t) = -1 - 2t + 2t^2 + \dots$$

Wszystko bez liczenia pochodnych pola wektorowego.

Przykład - ciąg dalszy.

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2	0	-4	4
2	-2	2						

$$x^{[2]} = \frac{1}{2} F_1^{[1]} = -2$$

$$y^{[2]} = \frac{1}{2} F_2^{[1]} = 2$$

Zatem otrzymaliśmy początek rozwinięcia Taylora dla rozwiązania

$$x(t) = 1 - 2t - 2t^2 + \dots$$

$$y(t) = -1 - 2t + 2t^2 + \dots$$

Wszystko bez liczenia pochodnych pola wektorowego.

Przykład - ciąg dalszy.

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2	0	-4	4
2	-2	2						

$$x^{[2]} = \frac{1}{2} F_1^{[1]} = -2$$

$$y^{[2]} = \frac{1}{2} F_2^{[1]} = 2$$

Zatem otrzymaliśmy początek rozwinięcia Taylora dla rozwiązania

$$x(t) = 1 - 2t - 2t^2 + \dots$$

$$y(t) = -1 - 2t + 2t^2 + \dots$$

Wszystko bez liczenia pochodnych pola wektorowego.

Przykład - ciąg dalszy.

k	x	y	v1	v2	v3	v4	F1	F2
0	1	-1	1	1	-1	2	-2	-2
1	-2	-2	-4	4	2	0	-4	4
2	-2	2						

$$x^{[2]} = \frac{1}{2} F_1^{[1]} = -2$$

$$y^{[2]} = \frac{1}{2} F_2^{[1]} = 2$$

Zatem otrzymaliśmy początek rozwinięcia Taylora dla rozwiązania

$$x(t) = 1 - 2t - 2t^2 + \dots$$

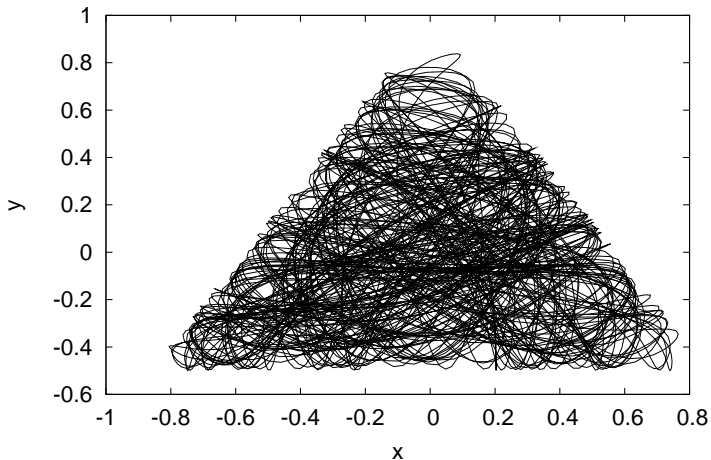
$$y(t) = -1 - 2t + 2t^2 + \dots$$

Wszystko bez liczenia pochodnych pola wektorowego.

Przykład: Hamiltonian Hénona-Heilesa.

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2y - \frac{1}{3}y^3$$

Typowa chaotyczna trajektoria



Symplektyczne metody Eulera:

$$p_{n+1} = p_n + h\nabla_q H(p_{n+1}, q_n),$$

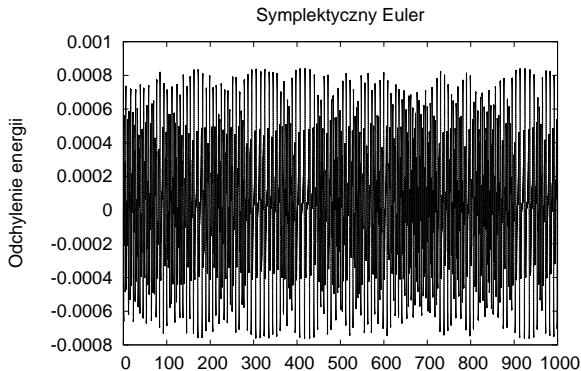
$$q_{n+1} = q_n - h\nabla_p H(p_{n+1}, q_n)$$

lub

$$p_{n+1} = p_n + h\nabla_q H(p_n, q_{n+1}),$$

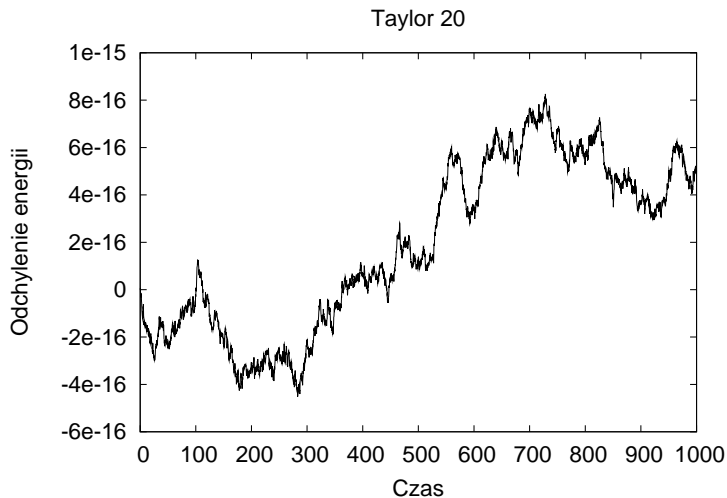
$$q_{n+1} = q_n - h\nabla_p H(p_n, q_{n+1}).$$

Stały krok $h = 1/128$.



Ilość kroków: 4810.

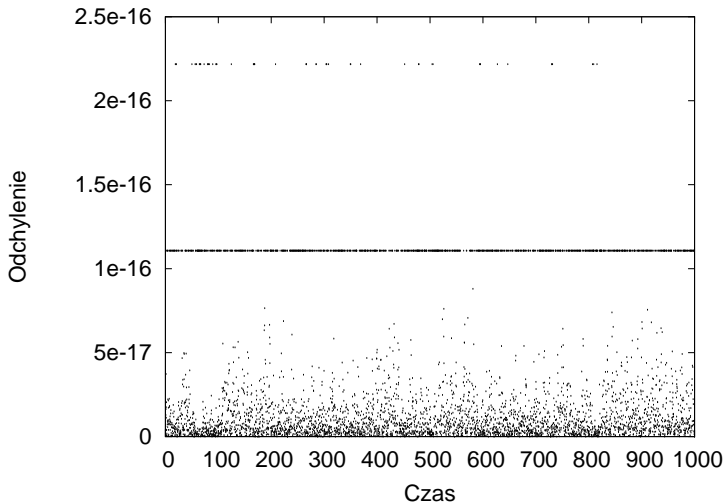
Najmniejszy wykonany krok czasowy: 0.183594.



Czy metoda jest symplektyczna?

W każdym kroku liczymy różniczkę $D = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ oraz $A = D^T J D - J$.

Na wykresie przedstawiono $\max_{i,j} |A_{ij}|$ w każdym wykonanym kroku.



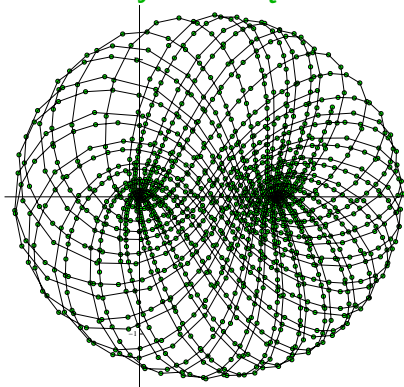
Przykład (Euler, 1760).

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{-Ax}{v^3} - \frac{B(x-a)}{u^3}, \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{-Ay}{v^3} - \frac{By}{u^3}$$

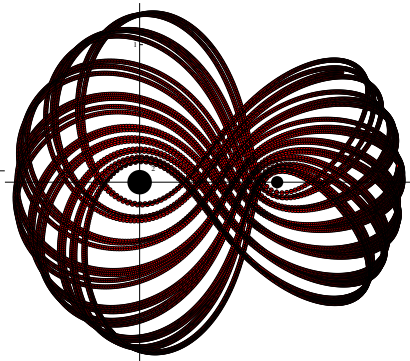
$$v = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad u = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Parametry: $A = 2$, $B = 1$

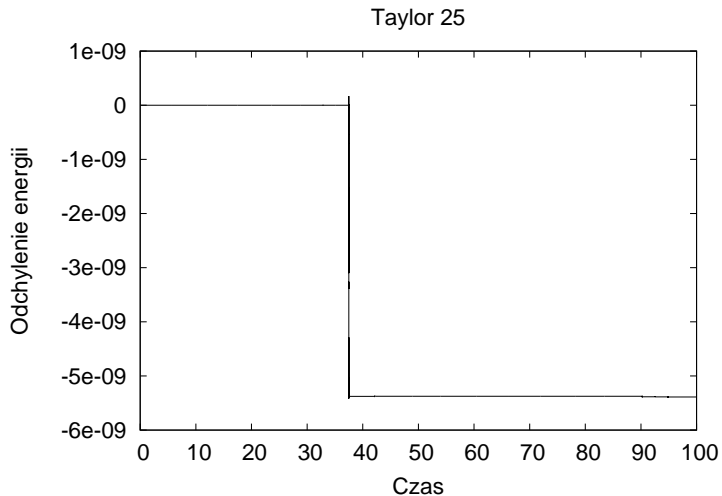
Taylor 30 rzędu



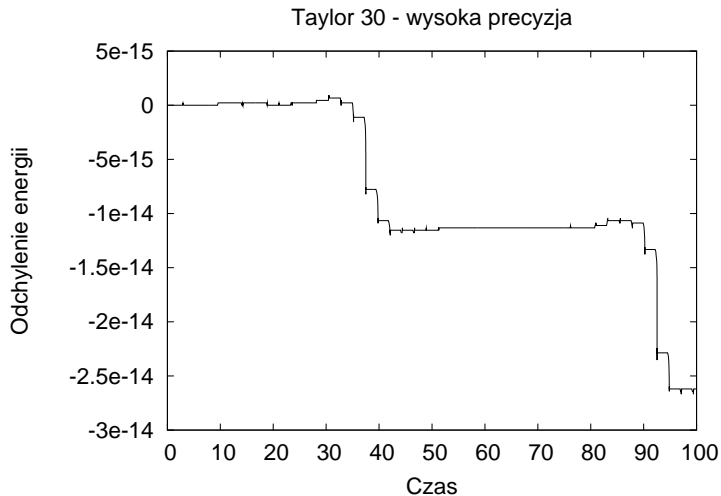
Symplektyczny Euler



Obliczenia w precyzji double - rząd 25.



Obliczenia wysokiej precyzji - 100 bitów mantysy, rząd 30.



Przykład

Policz na komputerze wartość funkcji

$$f(x, y) = 333.75y^6 + x^2(11x^2y^2 - y^6 - 121y^4 - 2) + 5.5y^8 + x/(2y)$$

dla $x_0 = 77617$ i $y_0 = 33096$.

narzędzie	obliczona wartość
Open Office 3.0 Calc	1.1726039
C++ float (32 bity)	$-2.51654 \cdot 10^{29}$
C++ double (64 bity)	$-4.15628 \cdot 10^{20}$
C++ long double (80 bitów)	$5.7646 \cdot 10^{17}$
Mathematica	$-1.18059 \cdot 10^{21}$
GNU MP (140 bitów)	-0.827396
Mathematica - wynik dokładny	$-54767/66192 \approx -0.827396$

Przykład

Policz na komputerze wartość funkcji

$$f(x, y) = 333.75y^6 + x^2(11x^2y^2 - y^6 - 121y^4 - 2) + 5.5y^8 + x/(2y)$$

dla $x_0 = 77617$ i $y_0 = 33096$.

narzędzie	obliczona wartość
Open Office 3.0 Calc	1.1726039
C++ float (32 bity)	$-2.51654 \cdot 10^{29}$
C++ double (64 bity)	$-4.15628 \cdot 10^{20}$
C++ long double (80 bitów)	$5.7646 \cdot 10^{17}$
Mathematica	$-1.18059 \cdot 10^{21}$
GNU MP (140 bitów)	-0.827396
Mathematica - wynik dokładny	$-54767/66192 \approx -0.827396$

Przyczyna: Dwa składniki sumy

$$\begin{aligned} T_1 &= 333.75y_0^6 + x_0^2(11x_0^2y_0^2 - y_0^6 - 121y_0^4 - 2) \\ &= -7917111340668961361101134701524942850 \end{aligned}$$

$$T_2 = 5.5y_0^8 = +7917111340668961361101134701524942848$$

są bardzo duże na moduł, a ich suma wynosi -2 .

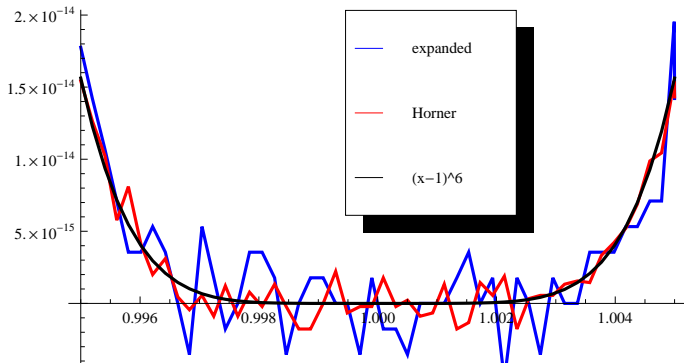
Przy obliczeniach np. z precyzją double mamy do dyspozycji co najwyżej 17 cyfr znaczących.

Przykład

“Wykres” wielomianu

$$\begin{aligned}f(x) &= (x - 1)^6 \\ &= x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 \\ &= x(x(x(x(x(x - 6) + 15) - 20) + 15) - 6) + 1\end{aligned}$$

przy użyciu różnych reprezentacji



Sumy obliczone w precyzji float (32 bity)

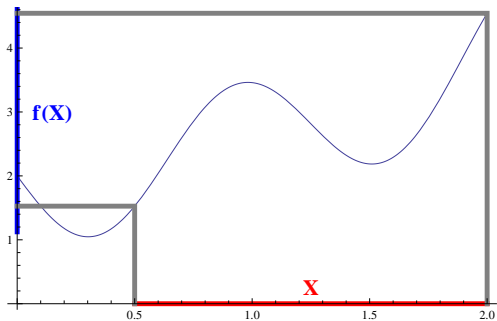
$$\sum_{i=1}^{1000} 10^{-3} = 0.99999070167541504$$

$$\sum_{i=1}^{10000} 10^{-4} = 1.0000535249710083$$

Napisz program

Ścisła analiza numeryczna

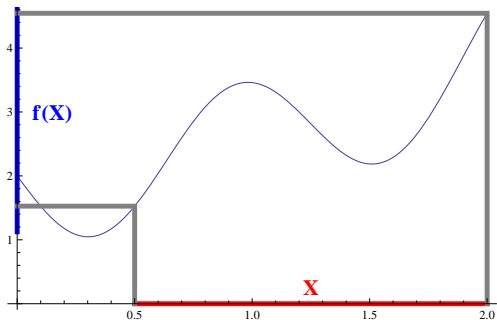
Cel: oszacować wartość funkcji na zbiorze argumentów



- pełna automatyzacja obliczeń komputerowych
- funkcje bywają skomplikowane:
 - wielu zmiennych
 - uwikłane
 - rozwiązania równań różniczkowych
 - parametryzacja rozmaitości niezmienniczych

Ścisła analiza numeryczna

Cel: oszacować wartość funkcji na zbiorze argumentów



- pełna automatyzacja obliczeń komputerowych
- funkcje bywają skomplikowane:
 - wielu zmiennych
 - uwikłane
 - rozwiązania równań różniczkowych
 - parametryzacja różnorodności niezmienniczych

Najprostsza idea:

- oszacować obraz przedziału przez funkcje elementarne
- propagować te oszacowania przez złożenia funkcji elementarnych
- jeśli funkcja nie jest złożeniem funkcji elementarnych, to użyć analitycznych oszacowań, w których wystąpią funkcje elementarne

Dla $\diamond \in \{+, -, *, /\}$ określamy

$$[\underline{a}, \bar{a}] \diamond [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{c}, \bar{c}]$$

gdzie

$$\underline{c} = \min\{a \diamond b : a \in [\underline{a}, \bar{a}], b \in [\underline{b}, \bar{b}]\},$$

$$\bar{c} = \max\{a \diamond b : a \in [\underline{a}, \bar{a}], b \in [\underline{b}, \bar{b}]\}$$

przy czym dla dzielenia zakładamy, że $0 \notin [\underline{b}, \bar{b}]$.

Można rozszerzyć na funkcje elementarne $\sqrt{\quad}$, \exp , \log , ...
korzystając z ich monotoniczności.

Dla $\diamond \in \{+, -, *, /\}$ określamy

$$[\underline{a}, \bar{a}] \diamond [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{c}, \bar{c}]$$

gdzie

$$\underline{c} = \min\{a \diamond b : a \in [\underline{a}, \bar{a}], b \in [\underline{b}, \bar{b}]\},$$

$$\bar{c} = \max\{a \diamond b : a \in [\underline{a}, \bar{a}], b \in [\underline{b}, \bar{b}]\}$$

przy czym dla dzielenia zakładamy, że $0 \notin [\underline{b}, \bar{b}]$.

Można rozszerzyć na funkcje elementarne $\sqrt{}$, \exp , \log , ... korzystając z ich monotoniczności.

Wynik zależy od reprezentacji wyrażenia!

Przykład

Obliczyć $f(x) = (x - 1)^2 - 1 = x(x - 2) = x^2 - 2x$ dla $[x] = [0, 1]$

$$([x] - 1)^2 - 1 = [-1, 0]^2 - 1 = [0, 1] - 1 = [-1, 0]$$

$$[x] * ([x] - 2) = [0, 1] * ([0, 1] - 2) = [0, 1] * [-2, -1] = [-2, 0]$$

$$[x]^2 - 2[x] = [0, 1]^2 - 2[0, 1] = [0, 1] - [0, 2] = [-2, 1]$$

Niezależnie od reprezentacji wyrażenia otrzymany przedział zawiera obraz odcinka $[0, 1]$ przez funkcję f .

Należy minimalizować liczę wystąpień zmiennych w wyrażeniach.

Wynik zależy od reprezentacji wyrażenia!

Przykład

Obliczyć $f(x) = (x - 1)^2 - 1 = x(x - 2) = x^2 - 2x$ dla $[x] = [0, 1]$

$$([x] - 1)^2 - 1 = [-1, 0]^2 - 1 = [0, 1] - 1 = [-1, 0]$$

$$[x] * ([x] - 2) = [0, 1] * ([0, 1] - 2) = [0, 1] * [-2, -1] = [-2, 0]$$

$$[x]^2 - 2[x] = [0, 1]^2 - 2[0, 1] = [0, 1] - [0, 2] = [-2, 1]$$

Niezależnie od reprezentacji wyrażenia otrzymany przedział zawiera obraz odcinka $[0, 1]$ przez funkcję f .

Należy minimalizować liczę wystąpień zmiennych w wyrażeniach.

Wynik zależy od reprezentacji wyrażenia!

Przykład

Obliczyć $f(x) = (x - 1)^2 - 1 = x(x - 2) = x^2 - 2x$ dla $[x] = [0, 1]$

$$([x] - 1)^2 - 1 = [-1, 0]^2 - 1 = [0, 1] - 1 = [-1, 0]$$

$$[x] * ([x] - 2) = [0, 1] * ([0, 1] - 2) = [0, 1] * [-2, -1] = [-2, 0]$$

$$[x]^2 - 2[x] = [0, 1]^2 - 2[0, 1] = [0, 1] - [0, 2] = [-2, 1]$$

Niezależnie od reprezentacji wyrażenia otrzymany przedział zawiera obraz odcinka $[0, 1]$ przez funkcję f .

Należy minimalizować liczę wystąpień zmiennych w wyrażeniach.

Wynik zależy od reprezentacji wyrażenia!

Przykład

Obliczyć $f(x) = (x - 1)^2 - 1 = x(x - 2) = x^2 - 2x$ dla $[x] = [0, 1]$

$$([x] - 1)^2 - 1 = [-1, 0]^2 - 1 = [0, 1] - 1 = [-1, 0]$$

$$[x] * ([x] - 2) = [0, 1] * ([0, 1] - 2) = [0, 1] * [-2, -1] = [-2, 0]$$

$$[x]^2 - 2[x] = [0, 1]^2 - 2[0, 1] = [0, 1] - [0, 2] = [-2, 1]$$

Niezależnie od reprezentacji wyrażenia otrzymany przedział zawiera obraz odcinka $[0, 1]$ przez funkcję f .

Należy minimalizować liczę wystąpień zmiennych w wyrażeniach.

Wynik zależy od reprezentacji wyrażenia!

Przykład

Obliczyć $f(x) = (x - 1)^2 - 1 = x(x - 2) = x^2 - 2x$ dla $[x] = [0, 1]$

$$([x] - 1)^2 - 1 = [-1, 0]^2 - 1 = [0, 1] - 1 = [-1, 0]$$

$$[x] * ([x] - 2) = [0, 1] * ([0, 1] - 2) = [0, 1] * [-2, -1] = [-2, 0]$$

$$[x]^2 - 2[x] = [0, 1]^2 - 2[0, 1] = [0, 1] - [0, 2] = [-2, 1]$$

Niezależnie od reprezentacji wyrażenia otrzymany przedział zawiera obraz odcinka $[0, 1]$ przez funkcję f .

Należy minimalizować liczę wystąpień zmiennych w wyrażeniach.

Jak możemy wnioskować w oparciu o obliczenia zmiennopozycyjne?

Standard IEEE754 określa między innymi

- sposób reprezentacji liczb zmiennopozycyjnych
- jakie działania są wykonywane przez procesor na liczbach zmiennopozycyjne
- w jaki sposób są wykonywane te działania - zaokrąglania wyników

Procesor wylicza wynik operacji najlepiej jak może przy wybranym trybie zaokrąglania.

Przykład

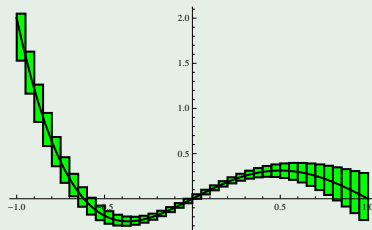
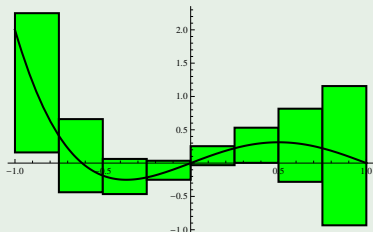
$$\downarrow (1./10) = 0.099999999999999992$$

$$\uparrow (1./10) = 0.100000000000000001$$

Napisz program

Przykład

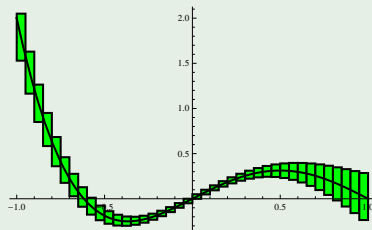
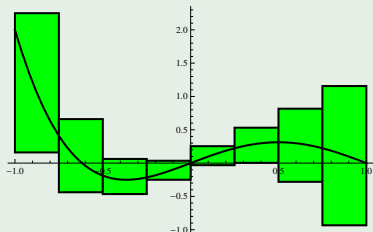
$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x$$



Napisz program

Przykład

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x$$



Napisz program

Przypomnienie:

F - wielomian Taylora stopnia r dla f w punkcie a

$$f(a+h) - F(h) = f^{[r+1]}(y)h^{r+1}$$

dla pewnego $y \in [a, a+h]$.

Błąd całki oznaczonej można ściśle oszacować

$$\left| \int_a^{a+h} f(x) dx - \int_0^h F(t) dt \right| \in \left| f^{[r+1]}([a, a+h]) \right| \frac{h^{r+2}}{r+2}$$

Pokaż program

Przypomnienie:

F - wielomian Taylora stopnia r dla f w punkcie a

$$f(a+h) - F(h) = f^{[r+1]}(y)h^{r+1}$$

dla pewnego $y \in [a, a+h]$.

Błąd całki oznaczonej można ściśle oszacować

$$\left| \int_a^{a+h} f(x)dx - \int_0^h F(t)dt \right| \in \left| f^{[r+1]}([a, a+h]) \right| \frac{h^{r+2}}{r+2}$$

[Pokaż program](#)

Ścisła metoda Taylora dla równań różniczkowych

- $[X]$ - **zbiór** warunków początkowych
- $[X]^{[k]}(0)$ - oszacowanie na zbiór k -tych współczynników Taylora $x^{[k]}(0)$ dla $x \in [X]$
- $[Y]$ - taki, że $[X](0, h) \subset [Y]$ (**rough enclosure**)

$$[X](h) \subset \sum_{k=0}^r X^{[k]}(0)h^k + [Y]^{[r+1]}(0)h^{r+1}$$

Jak znaleźć $[Y]$?

Ścisła metoda Taylora dla równań różniczkowych

- $[X]$ - **zbiór** warunków początkowych
- $[X]^{[k]}(0)$ - oszacowanie na zbiór k -tych współczynników Taylora $x^{[k]}(0)$ dla $x \in [X]$
- $[Y]$ - taki, że $[X](0, h) \subset [Y]$ (**rough enclosure**)

$$[X](h) \subset \sum_{k=0}^r X^{[k]}(0)h^k + [Y]^{[r+1]}(0)h^{r+1}$$

Jak znaleźć $[Y]$?

Ścisła metoda Taylora dla równań różniczkowych

- $[X]$ - **zbiór** warunków początkowych
- $[X]^{[k]}(0)$ - oszacowanie na zbiór k -tych współczynników Taylora $x^{[k]}(0)$ dla $x \in [X]$
- $[Y]$ - taki, że $[X](0, h) \subset [Y]$ (**rough enclosure**)

$$[X](h) \subset \sum_{k=0}^r X^{[k]}(0)h^k + [Y]^{[r+1]}(0)h^{r+1}$$

Jak znaleźć $[Y]$?

Ścisła metoda Taylora dla równań różniczkowych

- $[X]$ - **zbiór** warunków początkowych
- $[X]^{[k]}(0)$ - oszacowanie na zbiór k -tych współczynników Taylora $x^{[k]}(0)$ dla $x \in [X]$
- $[Y]$ - taki, że $[X](0, h) \subset [Y]$ (**rough enclosure**)

$$[X](h) \subset \sum_{k=0}^r X^{[k]}(0)h^k + [Y]^{[r+1]}(0)h^{r+1}$$

Jak znaleźć $[Y]$?

Ścisła metoda Taylora dla równań różniczkowych

- $[X]$ - **zbiór** warunków początkowych
- $[X]^{[k]}(0)$ - oszacowanie na zbiór k -tych współczynników Taylora $x^{[k]}(0)$ dla $x \in [X]$
- $[Y]$ - taki, że $[X](0, h) \subset [Y]$ (**rough enclosure**)

$$[X](h) \subset \sum_{k=0}^r X^{[k]}(0)h^k + [Y]^{[r+1]}(0)h^{r+1}$$

Jak znaleźć $[Y]$?

Twierdzenie

$\dot{x} = f(x)$ - równanie różniczkowe, z prawą stroną gładką

$[X]$, $[Y]$ - wektory przedziałowe

$h > 0$

Jeśli

$$[X] + [0, h]f([Y]) \subset \text{int}([Y])$$

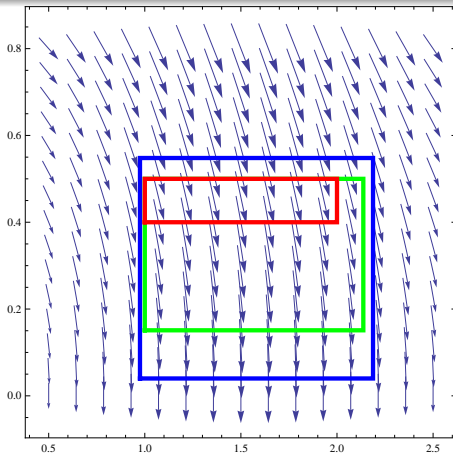
to

- dla $x \in [X]$ rozwiązanie jest określone na przedziale $[0, h]$
- dla $t \in [0, h]$, $x \in [X]$ zachodzi $x(t) \in [Y]$

Ważna odpowiednia predykcja kroku czasowego i zbioru $[Y]$

Przykład

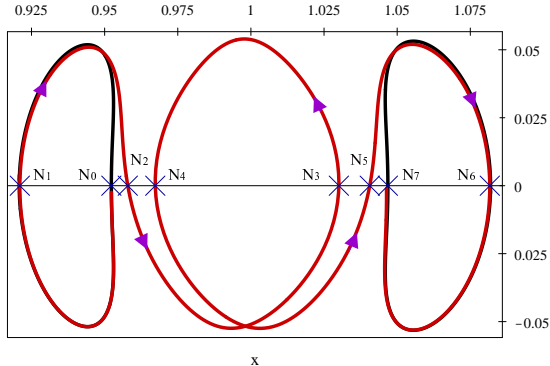
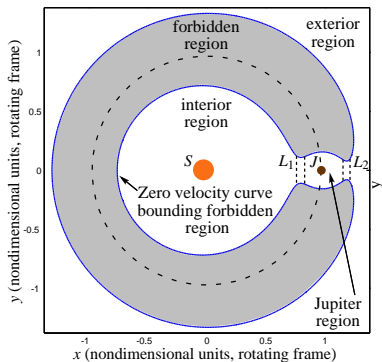
$$x'' = -\sin(x) + 0.1x', \quad h = 0.25$$



$$[X] = [1, 2] \times [0.4, 0.5]$$

$$[Y] = [X] + h[-.2, 1.5] * f([X]) \subset [0.9749, 2.1875] \times [0.04, 0.548]$$

$$[Z] = [X] + [0, h] * f([Y]) \subset [1.0, 2.137] \times [0.1502, 0.5] \subset \text{int}([Y])$$



- 1 P. Zgliczyński, DW, *Heteroclinic Connections between Periodic Orbits in Planar Restricted Circular Three Body Problem - A Computer Assisted Proof*, Comm. Math. Phys. 234, 37–75, (2003).
- 2 P. Zgliczyński, DW, *Heteroclinic Connections between Periodic Orbits in Planar Restricted Circular Three Body Problem - Part II*, Comm. Math. Phys. 259, 561–576, (2005).
- 3 D. W. Dunham and R. W. Farquhar, *Libration point missions*, in *Libration Point Orbits and Applications*, G. Gómez, M. W. Lo, and J. J. Masdemont, eds., 1978–2002, 2003.
- 4 K. C. Howell, B. T. Barden, R. S. Wilson, and M. W. Lo, *Trajectory design using a dynamical systems approach with application to GENESIS*, Advances in the Astronautical Sciences 97, 1665–1684, (1998).

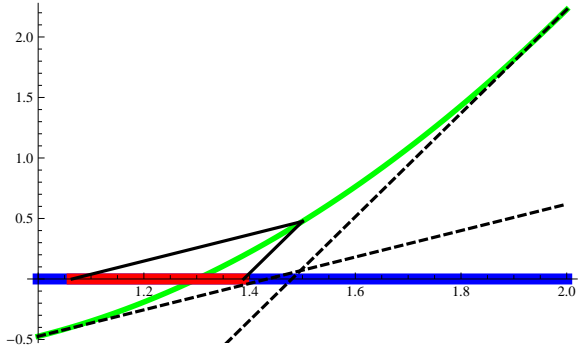
Twierdzenie (przedziałowa metoda Newtona)

- $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ klasy C^1
- $X \subset \mathbb{R}^n$ - zwarty, wypukły, $x_0 \in X$

Określamy **przedziałowy operator Newtona**

$$N(f, X, x_0) = x_0 - [Df(X)]_I^{-1} f(x_0)$$

- jeśli $N(f, X, x_0) \subset \text{int}X$ to f ma dokładnie jedno zero w X . Ponadto, jeśli x_* jest tym zerem, to $x_* \in N(f, X, x_0)$
- jeśli $N(f, X, x_0) \cap X = \emptyset$ to f nie ma zer w X



Przykład

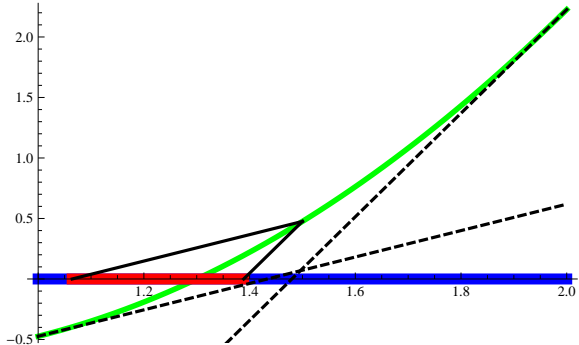
$$f(x) = x(x^2 + 2) + 1$$

Przybliżone zero f to $x_* \approx -0.453398\dots$

$$x_0 = -0.5 \quad f(x_0) = -0.125$$

$$X = [-1, 0] \quad Df(X) \subset [2, 5]$$

$$N(f, X, x_0) \subset [-0.475, -0.4375] \subset \text{int}X = (-1, 0)$$



Przykład

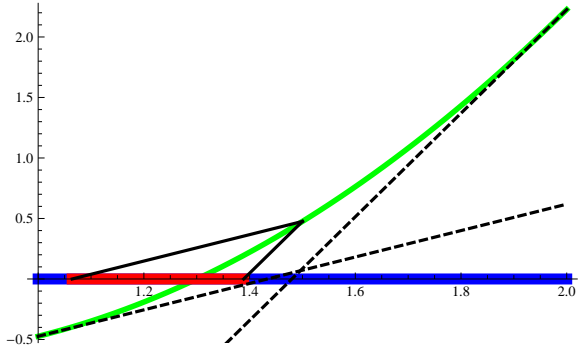
$$f(x) = x(x^2 + 2) + 1$$

Przybliżone zero f to $x_* \approx -0.453398\dots$

$$x_0 = -0.5 \quad f(x_0) = -0.125$$

$$X = [-1, 0] \quad Df(X) \subset [2, 5]$$

$$N(f, X, x_0) \subset [-0.475, -0.4375] \subset \text{int}X = (-1, 0)$$



Przykład

$$f(x) = x(x^2 + 2) + 1$$

Przybliżone zero f to $x_* \approx -0.453398\dots$

$$x_0 = -0.5 \quad f(x_0) = -0.125$$

$$X = [-1, 0] \quad Df(X) \subset [2, 5]$$

$$N(f, X, x_0) \subset [-0.475, -0.4375] \subset \text{int}X = (-1, 0)$$

Układ Rösslera - (Rössler 1976)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + b * y \\ \dot{z} &= b + z * (x - a)\end{aligned}$$

$$a = 5.7, \quad b = 0.2$$

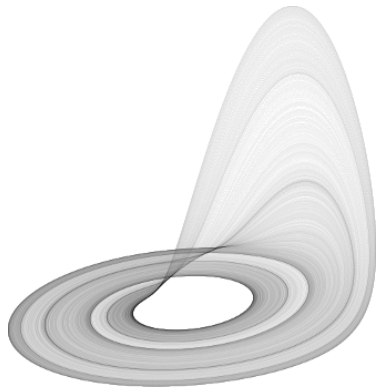
Rozwiązania okresowe



Punkty stałe odwzorowania
Poincarégo P



Zera $P - \text{Id}$

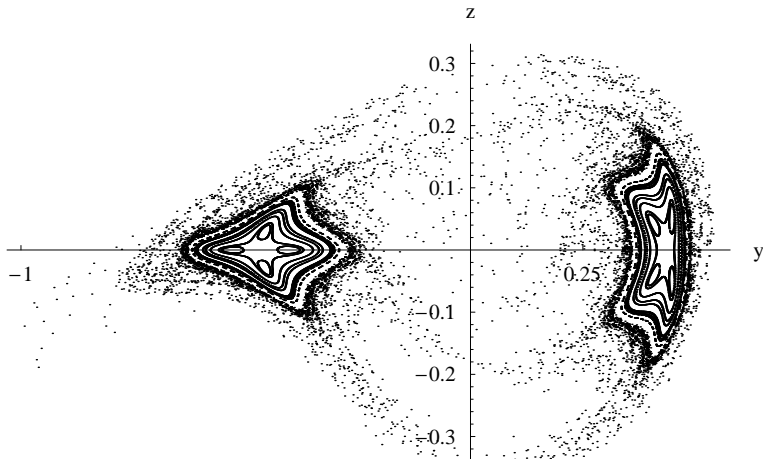


Układ Michelsona:

fala wędrująca w równaniach Kuramoto-Sivashinskyego

$$x''' + x' + \frac{1}{2}x^2 = c^2$$

Dla $c \in (0, 0.3194)$ obserwowane są orbity okresowe eliptyczne



$$C_{elliptic} = (0.001, 0.31937494990544240681)$$

Twierdzenie

- 1 *Istnieje ciągła rodzina symetrycznych, eliptycznych rozwiązań okresowych w zakresie parametrów $c \in C_{elliptic}$.*
- 2 *Ponadto dla*

$$c \in C_{stable} = C_{elliptic} \setminus (G_1 \cup G_2)$$

gdzie

$$G_1 = 0.2254404 \begin{matrix} 8933766649978 \\ 7596958760593 \end{matrix} \quad (1:4 \text{ rezonans})$$

$$G_2 = 0.27634 \begin{matrix} 347260295466508 \\ 298642570043203 \end{matrix} \quad (1:3 \text{ rezonans})$$

orbity są stabilne:

$$C_{elliptic} = (0.001, 0.31937494990544240681)$$

Twierdzenie

- 1 *Istnieje ciągła rodzina symetrycznych, eliptycznych rozwiązań okresowych w zakresie parametrów $c \in C_{elliptic}$.*
- 2 *Ponadto dla*

$$c \in C_{stable} = C_{elliptic} \setminus (G_1 \cup G_2)$$

gdzie

$$G_1 = 0.2254404_{7596958760593}^{8933766649978} \quad (1:4 \text{ rezonans})$$

$$G_2 = 0.27634_{298642570043203}^{347260295466508} \quad (1:3 \text{ rezonans})$$

orbity są stabilne:

każde otoczenie c_c zawiera 2D torus niezmienny

stabilny orbity p_c

$$C_{\text{elliptic}} = (0.001, 0.31937494990544240681)$$

Twierdzenie

- 1 *Istnieje ciągła rodzina symetrycznych, eliptycznych rozwiązań okresowych w zakresie parametrów $c \in C_{\text{elliptic}}$.*
- 2 *Ponadto dla*

$$c \in C_{\text{stable}} = C_{\text{elliptic}} \setminus (G_1 \cup G_2)$$

gdzie

$$G_1 = 0.2254404_{7596958760593}^{8933766649978} \quad (1:4 \text{ rezonans})$$

$$G_2 = 0.27634_{298642570043203}^{347260295466508} \quad (1:3 \text{ rezonans})$$

orbity są stabilne:

każde otoczenie p_c zawiera 2D torus niezmienniczy otaczający orbitę p_c .

$$C_{\text{elliptic}} = (0.001, 0.31937494990544240681)$$

Twierdzenie

- 1 *Istnieje ciągła rodzina symetrycznych, eliptycznych rozwiązań okresowych w zakresie parametrów $c \in C_{\text{elliptic}}$.*
- 2 *Ponadto dla*

$$c \in C_{\text{stable}} = C_{\text{elliptic}} \setminus (G_1 \cup G_2)$$

gdzie

$$G_1 = 0.2254404_{7596958760593}^{8933766649978} \quad (1:4 \text{ rezonans})$$

$$G_2 = 0.27634_{298642570043203}^{347260295466508} \quad (1:3 \text{ rezonans})$$

orbity są stabilne:

każde otoczenie p_c zawiera 2D torus niezmienniczy otaczający orbitę p_c .

Twierdzenie (Moser)

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(r, s) = (r_1, s_1)$ będzie analityczne i zachowujące miarę w postaci

$$r_1 = r \cos \alpha - s \sin \alpha + O_{2l+2},$$

$$s_1 = r \sin \alpha + s \cos \alpha + O_{2l+2},$$

$$\alpha = \sum_{k=0}^l \gamma_k (r^2 + s^2)^k$$

gdzie O_{2l+2} oznacza zbieżny szereg potęgowy względem r, s o składnikach stopnia większego niż $2l + 1$.

Jeśli chociaż jedna z liczb $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ jest niezerowa, to 0 jest stabilnym punktem stałym dla f . Ponadto każde otoczenie zera U zawiera krzywą niezmienniczą względem f , dyfeomorficzną z okręgiem i otaczającą zero.

Twierdzenie (Moser)

Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(r, s) = (r_1, s_1)$ będzie analityczne i zachowujące miarę w postaci

$$r_1 = r \cos \alpha - s \sin \alpha + O_{2l+2},$$

$$s_1 = r \sin \alpha + s \cos \alpha + O_{2l+2},$$

$$\alpha = \sum_{k=0}^l \gamma_k (r^2 + s^2)^k$$

gdzie O_{2l+2} oznacza zbieżny szereg potęgowy względem r, s o składnikach stopnia większego niż $2l + 1$.

Jeśli chociaż jedna z liczb $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ jest niezerowa, to 0 jest stabilnym punktem stałym dla f . Ponadto każde otoczenie zera U zawiera krzywą niezmienniczą względem f , dyfeomorficzną z okręgiem i otaczającą zero.

Odwzorowanie Poincarégo

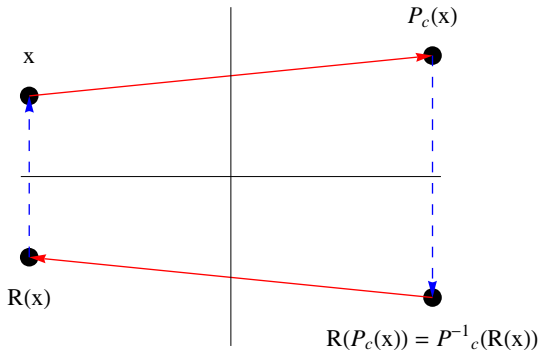
Sekcja Poincarégo

$$\Theta = \{(0, y', y'') \in \mathbb{R}^3\}$$

Odwzorowanie Poincarégo

$$P_c : \Theta \rightarrow \Theta$$

Symetria: $R(y', y'') = (y', -y'')$.



Odwzorowanie Poincarégo

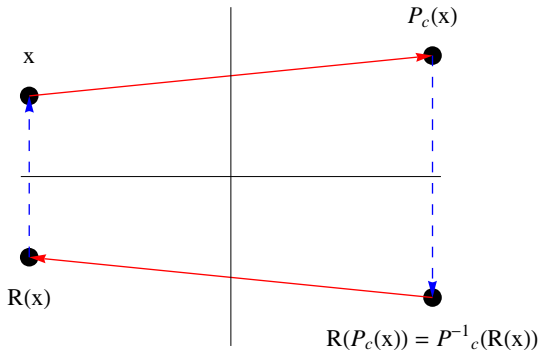
Sekcja Poincarégo

$$\Theta = \{(0, y', y'') \in \mathbb{R}^3\}$$

Odwzorowanie Poincarégo

$$P_c : \Theta \rightarrow \Theta$$

Symetria: $R(y', y'') = (y', -y'')$.



- 1 ustalamy przedział parametrów C
- 2 dowodzimy istnienia symetrycznych rozwiązań okresowych dla wszystkich $c \in C$
- 3 obliczamy formę normalną Birkhoffa
- 4 sprawdzamy warunek twistu ($\gamma_1 \neq 0$ lub $\gamma_2 \neq 0$)

Jeśli którykolwiek z kroków (2-4) zawiedzie \rightarrow dzielimy adaptacyjnie C

- 1 ustalamy przedział parametrów C
- 2 dowodzimy istnienia symetrycznych rozwiązań okresowych dla wszystkich $c \in C$
- 3 obliczamy formę normalną Birkhoffa
- 4 sprawdzamy warunek twistu ($\gamma_1 \neq 0$ lub $\gamma_2 \neq 0$)

Jeśli którykolwiek z kroków (2-4) zawiedzie \rightarrow dzielimy adaptacyjnie C

- 1 ustalamy przedział parametrów C
- 2 dowodzimy istnienia symetrycznych rozwiązań okresowych dla wszystkich $c \in C$
- 3 obliczamy formę normalną Birkhoffa
- 4 sprawdzamy warunek twistu ($\gamma_1 \neq 0$ lub $\gamma_2 \neq 0$)

Jeśli którykolwiek z kroków (2-4) zawiedzie \rightarrow dzielimy adaptacyjnie C

- 1 ustalamy przedział parametrów C
- 2 dowodzimy istnienia symetrycznych rozwiązań okresowych dla wszystkich $c \in C$
- 3 obliczamy formę normalną Birkhoffa
- 4 sprawdzamy warunek twistu ($\gamma_1 \neq 0$ lub $\gamma_2 \neq 0$)

Jeśli którykolwiek z kroków (2-4) zawiedzie \rightarrow dzielimy adaptacyjnie C

- 1 ustalamy przedział parametrów C
- 2 dowodzimy istnienia symetrycznych rozwiązań okresowych dla wszystkich $c \in C$
- 3 obliczamy formę normalną Birkhoffa
- 4 sprawdzamy warunek twistu ($\gamma_1 \neq 0$ lub $\gamma_2 \neq 0$)

Jeśli którykolwiek z kroków (2-4) zawiedzie \rightarrow dzielimy adaptacyjnie C

Trochę danych numerycznych

- kod bardzo współbieżny
- konieczny sprytny algorytm szeregowania i kontynuacja wzdłuż gałęzi
- obliczenia bardzo szybkie daleko od rezonansów
- wiele podziałów blisko rezonansów

parametr	#C	gamma
0.22544047596958760593 -001	534087	$\gamma_1 \in [10^{-5}, 6109]$
0.25960437634854482969 2544048933766649978	48625	$\gamma_1 \in [5 \cdot 10^{-9}, 29]$
0.2596058897301808388 437634854482969	32	$\gamma_1 \in [-0.54, 0.54]$ $\gamma_2 \in [144, 7309]$
0.27634298642570043203 596058897301808388	53624	$\gamma_1 \in [-4303148, -2 \cdot 10^{-9}]$
0.31937494990544240681 -27634347260295466508	174712	$\gamma_1 \in [6 \cdot 10^{-6}, 4346150]$

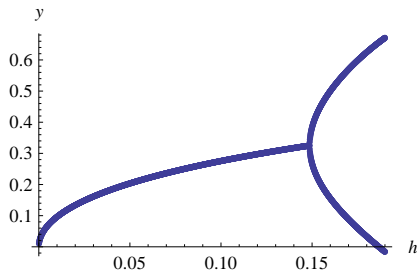
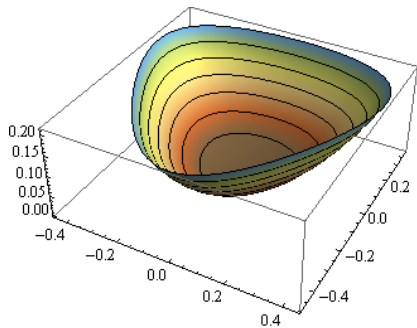
Trochę danych numerycznych

- kod bardzo współbieżny
- konieczny sprytny algorytm szeregowania i kontynuacja wzdłuż gałęzi
- obliczenia bardzo szybkie daleko od rezonansów
- wiele podziałów blisko rezonansów

parametr	#C	gamma
0.22544047596958760593 0.001	534087	$\gamma_1 \subset [10^{-5}, 6109]$
0.25960437634854482969 0.2544048933766649978	48625	$\gamma_1 \subset [5 \cdot 10^{-9}, 29]$
0.2596058897301808388 0.437634854482969	32	$\gamma_1 \subset [-0.54, 0.54]$ $\gamma_2 \subset [144, 7309]$
0.27634298642570043203 0.596058897301808388	53624	$\gamma_1 \subset [-4303148, -2 \cdot 10^{-9}]$
0.31937494990544240681 0.27634347260295466508	174712	$\gamma_1 \subset [6 \cdot 10^{-6}, 4346150]$

Hamiltonian Hénona-Heilsa

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + y(x^2 - \frac{1}{3}y^2)$$



Twierdzenie

- 1 Istnieje ciągła rodzina stabilnych, eliptycznych rozwiązań okresowych p_e dla układu Hénona-Heilsa sparametryzowana wartościami hamiltonianu $H \in H_0$, gdzie

$$H_0 = 0.\overset{16872011575378784154}{\underset{005}{} } \setminus (G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5)$$

$$G_1 = 0.1024287\overset{9758133447}{\underset{7110002155}{} } \quad (1:4 \text{ rezonans})$$

$$G_2 = 0.12721\overset{802548190511}{\underset{777769137946}{} } \quad (1:3 \text{ rezonans})$$

$$G_3 = 0.1\overset{5353509427464953618}{\underset{4865018854930956}{} } \quad (\text{podwojenie okresu})$$

$$G_4 = 0.15455\overset{308795996169913}{\underset{207382789026838}{} } \quad (1:4 \text{ rezonans})$$

$$G_5 = 0.1587\overset{2525999249498252}{\underset{0737379262367384}{} } \quad (1:3 \text{ rezonans})$$

- 2 Ponadto każde otoczenie orbity p_e zawężone do rozmaitości izoenergetycznej H_e odpowiadającej p_e zawiera 2D torus niezmienniczy otaczający p_e .

Twierdzenie

- ① Istnieje ciągła rodzina stabilnych, eliptycznych rozwiązań okresowych p_e dla układu Hénona-Heilsa sparametryzowana wartościami hamiltonianu $H \in H_0$, gdzie

$$H_0 = 0.\overset{16872011575378784154}{005} \setminus (G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5)$$

$$G_1 = 0.1024287\overset{9758133447}{7110002155} \quad (1:4 \text{ rezonans})$$

$$G_2 = 0.12721\overset{802548190511}{777769137946} \quad (1:3 \text{ rezonans})$$

$$G_3 = 0.1\overset{5353509427464953618}{4865018854930956} \quad (\text{podwojenie okresu})$$

$$G_4 = 0.15455\overset{308795996169913}{207382789026838} \quad (1:4 \text{ rezonans})$$

$$G_5 = 0.1587\overset{2525999249498252}{0737379262367384} \quad (1:3 \text{ rezonans})$$

- ② Ponadto każde otoczenie orbity p_e zawężone do rozmaitości izoenergetycznej H_e odpowiadającej p_e zawiera 2D torus niezmienniczy otaczający p_e .